

А.А. Курбатов

ПОКАЗАТЕЛИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

(Московский физико-технический институт)

Уравнение Бюргерса имеет ту же форму нелинейности, что и уравнения Навье—Стокса [1]. Оно часто используется как модельное уравнение при исследовании численных схем [2].

В данной работе устанавливается единственность и устойчивость стационарного решения уравнения Бюргерса, удовлетворяющего на отрезке граничным условиям первого рода. Аналитически получены выражения для показателей Ляпунова, характеризующих скорость приближения произвольного решения к стационарному.

1. Аналитические выражения для стационарных решений

Уравнение Бюргерса имеет вид

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}, \quad (1)$$

где $\nu = \text{const} > 0$. Приравнивая нулю производную u_t , для стационарного решения получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$uu_x = \nu u_{xx}. \quad (2)$$

Выполнив замену $u_x = p$, $u_{xx} = pp_u$, получим $u = \nu p_u$, откуда

$$2\nu u_x = u^2 + C_0. \quad (3)$$

Пусть сначала $C_0 = -a^2 < 0$ ($2\nu u_x < u^2$). Имеем $dx = 2\nu du/(u^2 - a^2)$,

$$\frac{ax}{\nu} = \ln C_1 \left| \frac{a-u}{a+u} \right|, \quad \text{где постоянная интегрирования } C_1 = \left| \frac{a+u(0)}{a-u(0)} \right|.$$

Отсюда, если $|u| < a$ ($u_x < 0$),

$$u = a \frac{C_1 - \exp(ax/\nu)}{C_1 + \exp(ax/\nu)} = -2\nu k_0 \operatorname{th} k_0(x - x_0), \quad \text{где } k_0 = \frac{a}{2\nu}, \quad x_0 = \frac{\nu}{a} \ln C_1,$$

а если $|u| > a$ ($0 < 2\nu u_x < u^2$), то

$$u = a \frac{C_1 + \exp(ax/\nu)}{C_1 - \exp(ax/\nu)} = -2\nu k_0 \operatorname{ctg} k_0(x - x_0).$$

Теперь пусть $C_0 = a^2 > 0$ ($2\nu u_x > u^2$), тогда $dx = 2\nu du/(u^2 + a^2)$,

$$\frac{ax}{2\nu} = \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C_1, \quad C_1 = -\operatorname{arctg} \frac{u(0)}{a}. \quad \text{Отсюда } u = a \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2\nu} - C_1 \right), \quad \text{или}$$

$$u = -2\nu k_0 \operatorname{ctg} k_0(x - x_0), \quad \text{где } k_0 = \frac{a}{2\nu}, \quad x_0 = \frac{1}{k_0} \operatorname{arcctg} \frac{u(0)}{2\nu k_0}.$$

Наконец, если $C_0 = 0$, $u = -2\nu/(x - x_0)$; если же $u_x = 0$, то $u^2 = C_0$.

Для удобства все получающиеся стационарные решения сведены в таблицу 1.

Поставим для уравнения (1) на отрезке $[0, l]$ граничные условия первого рода:

$$u(0, t) = A, \quad u(l, t) = B, \quad (4)$$

где A и B — постоянные величины. Выясним, какой вид из возможных (табл.1) будет иметь стационарное решение u^S уравнения Бюргерса (1), удовлетворяющее условиям (4). В этом разделе нас будут интересовать только непрерывные на отрезке $[0, l]$ стационарные решения.

Прежде всего очевидно, что при $A > B$ решение u^S может иметь только вид (д), так как это единственная в табл.1 убывающая функция. В случае, если $A = B$, стационарное решение может иметь только вид (г).

Рассмотрим теперь более интересный случай $A < B$. Элементарное вычисление показывает, что u^S имеет вид (б) тогда и только тогда, когда величина

$$H = 2\nu(B - A) - lAB$$

равна нулю. Теперь остается выяснить, когда реализуются случаи (а) и (в) (табл.1). Для этого заметим, что график функции u^S вида (б) в любой точке идет круче, чем график вида (в), но более полого, чем проходящий через эту же точку график вида (а). В самом деле, из (3) мы видим, что на каждом стационарном решении u^S величина $C_0 = 2\nu u_x - u^2$ постоянна; решение вида (а) получается из (3) при условии $C_0 > 0$, $2\nu u_x > u^2$ (кругой график), тогда как решение вида (в) — при условии $C_0 < 0$, $2\nu u_x < u^2$ (пологий график). Используя эту информацию о взаимном расположении графиков функций (а, б,

Таблица 1. Стационарные решения $u^S(x)$ уравнения Бюргерса и соответствующие им решения $\varphi^S(x, t)$ уравнения теплопроводности.

Везде в таблице $H = 2\nu(B - A) - LAB$, $2\nu k_0 = |C_0|^{1/2}$, где C_0 — константа в (3). В случае (а) $x_0 = (1/k_0) \operatorname{arctg}(A/2\nu k_0)$, в случае (б) $x_0 = 2\nu/A$, в случаях (в) и (д) $x_0 = (2/k_0) \ln |(A + 2\nu k_0)/(A - 2\nu k_0)|$.

$u^S(x)$	u, u'	A, B, H	$\varphi^S(x, t)$
а) $-2\nu k_0 \operatorname{ctg} k_0(x - x_0)$	$0 \leq u^2 < 2\nu u'$	$A < B, H > 0$	$C \sin k_0(x - x_0) \exp(-\nu k_0^2 t)$
б) $-2\nu/(x - x_0)$	$0 < u^2 = 2\nu u'$	$A < B, H = 0$	$C(x - x_0)$
в) $-2\nu k_0 \operatorname{cth} k_0(x - x_0)$	$0 < 2\nu u' < u^2$	$A < B, H < 0$	$C \operatorname{sh} k_0(x - x_0) \exp(\nu k_0^2 t)$
г) $\pm 2\nu k_0 = \text{const}$	$u' = 0$	$A = B$	$C \exp(\nu k_0^2 t \mp k_0 x)$
д) $-2\nu k_0 \operatorname{th} k_0(x - x_0)$	$u' < 0$	$A > B$	$C \operatorname{ch} k_0(x - x_0) \exp(\nu k_0^2 t)$

в, табл.1) и их непрерывность на $[0, l]$, мы легко устанавливаем: при $H > 0$ стационарное решение u^S может иметь только вид (а), а при $H < 0$ — только вид (в).

Отметим, что само существование стационарных решений, удовлетворяющих граничным условиям (4) для всех значений A и B , пока не доказано. Лишь в случаях $H = 0$ (б) и $A = B$ (г) существование таких решений очевидно.

2. Преобразование Коула—Хопфа

Уравнение Бюргерса (1) — редкий пример нелинейного уравнения, которое некоторой заменой удается свести к линейному. Именно, если в уравнении (1) сделать замену

$$u(x, t) = -2\nu (\ln |\varphi(x, t)|)_x', \quad (5)$$

то для новой функции $\varphi(x, t)$ получится уравнение теплопроводности

$$\varphi_t = \nu \varphi_{xx}. \quad (6)$$

Замена (5) называется преобразованием Коула—Хопфа (J.Cole, E.Hopf, ссылки на оригинальные работы можно найти в [1,2]). Обсудим некоторые свойства этой замены.

Во-первых, по заданному решению $u(x, t)$ уравнения Бюргерса (1) соответствующее решение $\varphi(x, t)$ уравнения теплопроводности (6) вос-

становливается не однозначно, а с точностью до постоянного множителя. Действительно, $(\ln |\varphi|)'_x = (\ln |C\varphi|)'_x$ для любой постоянной $C \neq 0$. (На первый взгляд даже кажется, что в последнем равенстве вместо константы C можно написать произвольную функцию времени $C(t)$. Но это было бы ошибочно, так как от умножения на произвольную функцию $C(t)$ функция $\varphi(x, t)$ перестанет удовлетворять уравнению теплопроводности.)

Во-вторых, при преобразовании (5) нулям φ соответствуют разрывы u . Поэтому для непрерывности u недостаточно, чтобы функция φ была непрерывна. Надо еще, чтобы φ при интересующих нас значениях x не обращалась в 0.

Далее, как легко убедиться, стационарным решениям $u^S(x)$ уравнения Бюргерса (1) соответствуют, вообще говоря, нестационарные решения $\varphi^S(x, t)$ уравнения теплопроводности (6). Они приведены в последнем столбце таблицы 1. Интересно, что среди них есть "нефизичные" решения, бесконечно возрастающие при больших t .

3. Существование и единственность стационарного решения

Мы сейчас установим существование и единственность стационарного решения u^S уравнения (1) с граничными условиями (4) для любых значений A и B , используя замену Коула—Хопфа (5).

Заметим, что при замене (5) задача (1,4) для уравнения Бюргерса превращается в задачу для уравнения теплопроводности (6)

$$\varphi_t = \nu \varphi_{xx}$$

с однородными граничными условиями третьего рода:

$$\varphi_x(0, t) + \frac{A}{2\nu} \varphi(0, t) = 0, \quad \varphi_x(l, t) + \frac{B}{2\nu} \varphi(l, t) = 0. \quad (7)$$

Пусть теперь φ^S — решение уравнения (6), соответствующее при замене (5) стационарному решению u^S уравнения (1). Такое φ^S должно иметь вид $\varphi^S(x, t) = X(x) \cdot T(t)$, в чем легко убедиться, подставив это в (5); здесь $X(x)$ — некоторая функция только от координаты x , а $T(t)$ — только от времени t . Подставляя φ^S в уравнение (6), получаем

$$\frac{T'}{\nu T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

(одна часть последнего равенства зависит только от t , другая—только от x , поэтому обе они должны равняться некоторой постоянной $-\lambda$). Для функции $X(x)$ имеем задачу на собственные значения

$$-X''(x) = \lambda X(x) \quad (8)$$

с граничными условиями

$$X'(0) + \frac{A}{2\nu} X(0) = 0, \quad X'(l) + \frac{B}{2\nu} X(l) = 0, \quad (9)$$

а для функции $T(t)$ сразу находим:

$$T(t) = e^{-\nu \lambda t}. \quad (10)$$

Для непрерывности u^S необходимо, чтобы функция φ^S нигде на $[0, l]$ не обращалась в нуль. Поэтому встает вопрос: сколько имеет задача (8,9) собственных функций, отличных от нуля везде на отрезке $[0, l]$. Ответ заключается в том, что при любых A, B такая собственная функция единственна. Это вытекает из следующего известного факта: при всех A, B собственные значения λ_i ($\lambda_0 < \lambda_1 < \dots$) задачи (8,9) простые, причем собственная функция X_i имеет на интервале $(0, l)$ ровно i нулей [3]. Итак, интересующая нас собственная функция принадлежит наименьшему собственному значению λ_0 , и для φ^S имеем:

$$\varphi^S(x, t) = X_0(x) \cdot \exp(-\nu \lambda_0 t).$$

Таким образом, стационарное решение u^S уравнения Бюргерса (1) с граничными условиями (4) при любых A, B существует и единственно:

$$u^S(x) = -2\nu(\ln |\varphi^S(x, t)|)'_z = -2\nu(\ln |X_0(x)|)'_z.$$

4. Устойчивость и показатели Ляпунова

Исследуем теперь, как меняется со временем величина $|u - u^S|$ для произвольного решения

$$u(x, t) = -2\nu(\ln |\varphi(x, t)|)'_z$$

уравнения Бюргерса (1), удовлетворяющего граничным условиям (4). Имеем:

$$|u - u^S| = 2\nu \left| \frac{\varphi_z^S}{\varphi^S} - \frac{\varphi_z}{\varphi} \right| = 2\nu \left| \frac{\varphi \varphi_z^S - \varphi^S \varphi_z}{\varphi^S \varphi} \right| =$$

$$= 2\nu \left| \frac{\varphi(\varphi_x^S - \varphi_z) + \varphi_z(\varphi - \varphi^S)}{\varphi^S \varphi} \right| = 2\nu \left| \frac{\varphi_z \tilde{\varphi} - \varphi \tilde{\varphi}_z}{\varphi^S \varphi} \right|.$$

Здесь введено обозначение $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^S$. Учитывая, что $u = -2\nu \varphi_z / \varphi$, для всех $x \in [0, l]$ и всех $t \geq 0$ получаем оценку:

$$|u - u^S| \leq |u| \cdot \left| \frac{\tilde{\varphi}}{\varphi^S} \right| + 2\nu \left| \frac{\tilde{\varphi}_z}{\varphi^S} \right| \leq \max_{[0, l]} |u(x, 0)| \cdot \left| \frac{\tilde{\varphi}}{\varphi^S} \right| + 2\nu \left| \frac{\tilde{\varphi}_z}{\varphi^S} \right|. \quad (11)$$

В неравенстве (11) использован принцип максимума для уравнения Бюргерса: максимум решения $u(x)$ на отрезке $[0, l]$ достигается либо в начальном условии, либо на границе отрезка. Это доказывается для уравнения (1) вполне аналогично тому, как это сделано в [4] для линейного уравнения параболического типа.

Функцию $\varphi(x, t)$ представим теперь в виде ряда

$$\varphi(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i X_i(x) T_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x, t) \quad (12)$$

по полной системе собственных функций $X_i(x)$ задачи (8,9). Видим, что член этого ряда $\varphi_0 = \alpha_0 X_0 T_0$ может отличаться от φ^S лишь постоянным множителем. Выберем константу C в φ^S (табл.1) так, чтобы выполнялось равенство $\varphi_0 = \varphi^S$. Тогда

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^S = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x, t). \quad (13)$$

Поскольку $T_i(t) = \exp(-\nu \lambda_i t)$, при $t \rightarrow \infty$ будем иметь

$$\varphi^S \sim \exp(-\nu \lambda_0 t), \quad \tilde{\varphi} \sim \exp(-\nu \lambda_1 t), \quad \tilde{\varphi}_z \sim \exp(-\nu \lambda_1 t),$$

и из оценки (11) находим

$$|u - u^S| \sim \exp(-\nu(\lambda_1 - \lambda_0)t), \quad (14)$$

что и доказывает устойчивость стационарного решения u^S .

Соотношение (14) получено в предположении, что в (12) $\alpha_1 \neq 0$, т.е. в разложении (12) функции φ по собственным функциям X_i задачи (8,9) присутствует член φ_1 с собственной функцией $X_1(x)$. В противном случае разложение (13) функции $\tilde{\varphi} = \varphi - \varphi^S$ будет начинаться не с φ_1 , а с некоторого φ_n , $n > 1$. При этом вместо (14) мы имели бы

$$|u - u^S| \sim \exp(-\nu(\lambda_n - \lambda_0)t), \quad (15)$$

где n есть номер первого ненулевого члена в разложении (13) функции φ по собственным функциям X_i задачи (8,9).

Заметим, что выражения для функций φ_i ($i = 1, 2, \dots$) отличаются от выписанных в табл.1 выражений для $\varphi_0 = \varphi^S$ только тем, что вместо k_0 и x_0 здесь появляются "свои" константы k_i и x_i . Все константы найдутся подстановкой функций $X_i(x)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) в граничные условия (9).

Вообще говоря, эта подстановка приводит к трансцендентным уравнениям для k_i . Опуская несложные выкладки, выпишем эти уравнения:

$$\operatorname{ctg} \xi_i = \frac{p}{\xi_i} + q\xi_i \quad \text{для } \varphi_i \text{ вида (а, табл.1), } \lambda_i = k_i^2 > 0, \text{ и}$$

$$\operatorname{cth} \xi_i = \frac{p}{\xi_i} - q\xi_i \quad \text{для } \varphi_i \text{ вида (в,д, табл.1), } \lambda_i = -k_i^2 < 0.$$

Здесь

$$\xi_i = k_i l, \quad p = \frac{lAB}{2\nu(B-A)}, \quad q = \frac{2\nu}{l(B-A)},$$

причем уравнение с $\operatorname{ctg} \xi_i$ может соответствовать любому i , а уравнение с $\operatorname{cth} \xi_i$ — лишь $i = 0$ или 1, так как соответствующие функции $\varphi_i = X_i \cdot \exp(-\nu \lambda_i t)$ (в,д, табл.1) не могут обращаться в нуль более одного раза.

Исключительный случай, когда все k_i и λ_i находятся явно, имеет место при $A = B$ в условиях (4) и (9), при этом на отрезке $[0, l]$ должны укладываться целое число полупериодов функции $X_i(x) = \sin k_i(x - x_i)$, что сразу дает $k_i = \pi i / l$ ($i = 1, 2, \dots$); величина k_0 здесь равна $|A|/(2\nu)$ (см. раздел 1). Таким образом, при $A = B$

$$\lambda_n - \lambda_0 = \left(\frac{\pi n}{l} \right)^2 + \left(\frac{A}{2\nu} \right)^2.$$

Дадим теперь следующее определение. Пусть $u(x, t)$ — некоторое решение уравнения (1). Показателем Ляпунова этого решения назовем вычисленную в некоторой норме $\|\cdot\|$ величину

$$\mu = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \ln \|u - u^S\| \right). \quad (16)$$

Легко видеть, что если для какого-то решения $u(x, t)$ оказалось, что $\|u - u^S\| \sim \exp(\delta t)$, то такое число δ будет показателем Ляпунова этого решения.

Под нормой теперь будем понимать максимум модуля функции:

$$\|u(x)\| = \max_{[0, l]} |u(x)|.$$

Тогда асимптотическое равенство (15) сразу позволяет нам найти все показатели Ляпунова:

$$\mu_i = -\nu(\lambda_i - \lambda_0), \quad i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

Решения u_i задачи (1,4), соответствующие показателям μ_i , наиболее просто записываются явно как

$$u_i(x, t) = -2\nu(\ln |\varphi^S(x, t) + \varphi_i(x, t)|)_x^y.$$

Например, для случая (а, табл.1) $\varphi^S = C \sin k_0(x - x_0) \cdot \exp(-\nu k_0^2 t)$, $\varphi_i = \alpha_i \sin k_i(x - x_i) \cdot \exp(-\nu k_i^2 t)$, и мы имеем

$$u_i = -2\nu \frac{C k_0 \cos k_0(x - x_0) + \alpha_i k_i \cos k_i(x - x_i) \cdot \exp(-\nu(k_i^2 - k_0^2)t)}{C \sin k_0(x - x_0) + \alpha_i \sin k_i(x - x_i) \cdot \exp(-\nu(k_i^2 - k_0^2)t)}.$$

Поскольку каждый член φ_i ряда (12) удовлетворяет граничным условиям третьего рода (7), все функции $u_i(x, t)$ действительно удовлетворяют граничным условиям (4).

Итак, мы нашли, что показатели Ляпунова уравнения Бюргерса (1) с граничными условиями (4) тесно связаны с собственными числами линейной задачи (8,9). Все они отрицательны, их счетное число, соответствующие решения уравнения Бюргерса записываются в явном виде.

Это дает интересный пример аналитического нахождения показателей Ляпунова для нелинейного уравнения в частных производных.

Список литературы

1. Карпман В.И. Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
2. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991.
3. Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970.
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976.

Поступила в редакцию 31.10.92
в редакцию 20.12.92